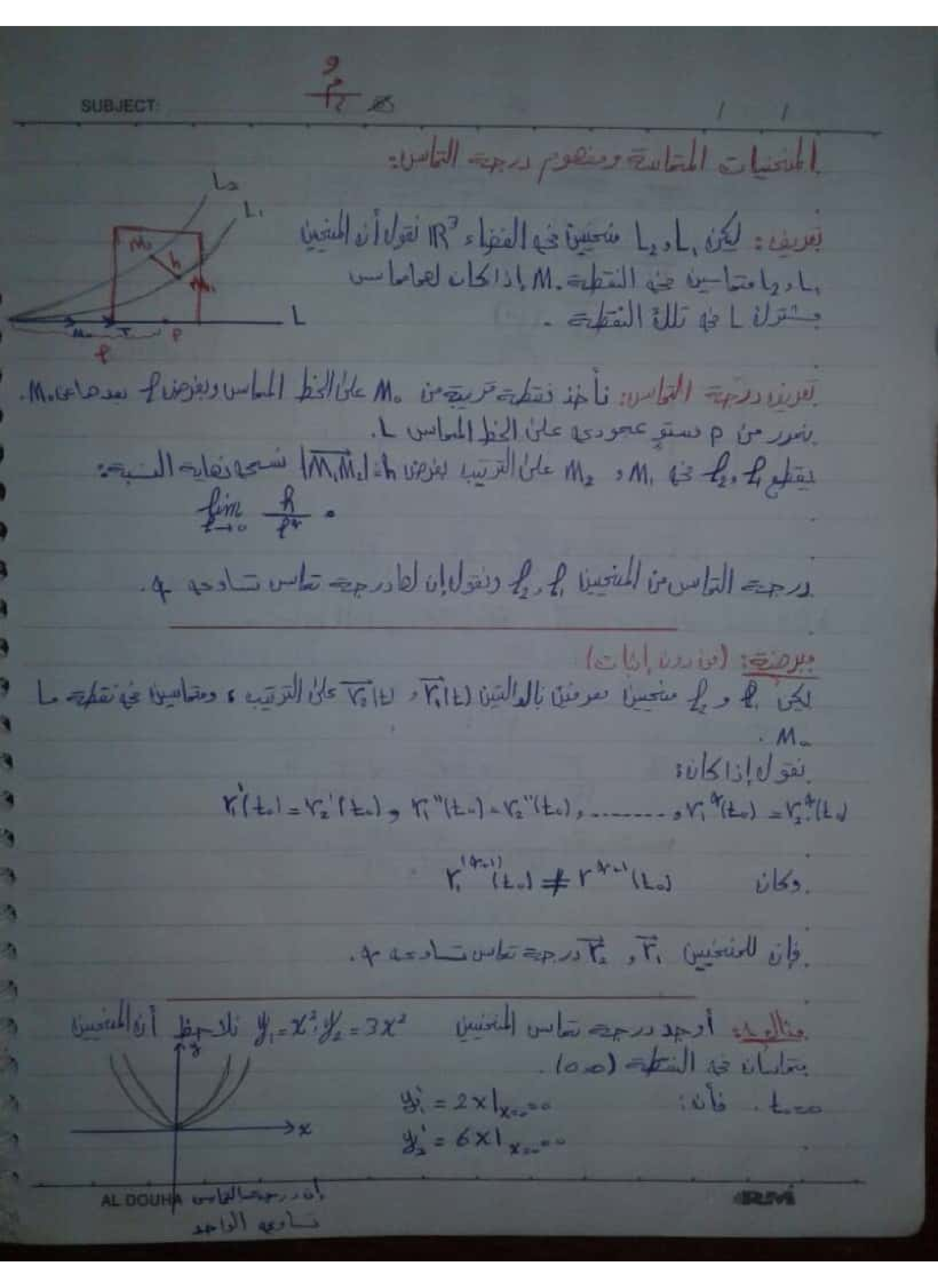


المنحنيات المتماسة ومفهوم درجة التماس:

تعريف: ليكن L_1 و L_2 منحنيين في الفضاء $\mathbb{R}^3$ نقول أن المنحنيين L_1 و L_2 متماسين في النقطة M_0 إذا كان لهما مماس مشترك L في تلك النقطة.

تعريف درجة التماس: نأخذ نقطة قريبة من M_0 على الخط المماس ونفرض ℓ بعدها عن M_0. نمرر من P مستوٍ عمودي على الخط المماس L. يقطع ℓ_1، ℓ_2 في M_1 و M_2 على الترتيب نفرض $h = |\overline{M_1M_2}|$ نسمي نهاية النسبة:

$$\lim_{\ell \to 0} \frac{h}{\ell^q}$$

درجة التماس من المنحنيين ℓ_1، ℓ_2 ونقول إن لها درجة تماس تساوي q.

مبرهنة: (من دون إثبات)

ليكن ℓ_1 و ℓ_2 منحنيين معرفين بالدالتين $\vec{r_1}(t)$، $\vec{r_2}(t)$ على الترتيب، ومتماسين في نقطة ما M_0.

نقول إذا كان:

$$r_1'(t_0) = r_2'(t_0),\ r_1''(t_0) = r_2''(t_0),\ \dots\dots,\ r_1^{(q)}(t_0) = r_2^{(q)}(t_0)$$

وكان $r_1^{(q+1)}(t_0) \neq r_2^{(q+1)}(t_0)$

فإن للمنحنيين $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ درجة تماس تساوي q.

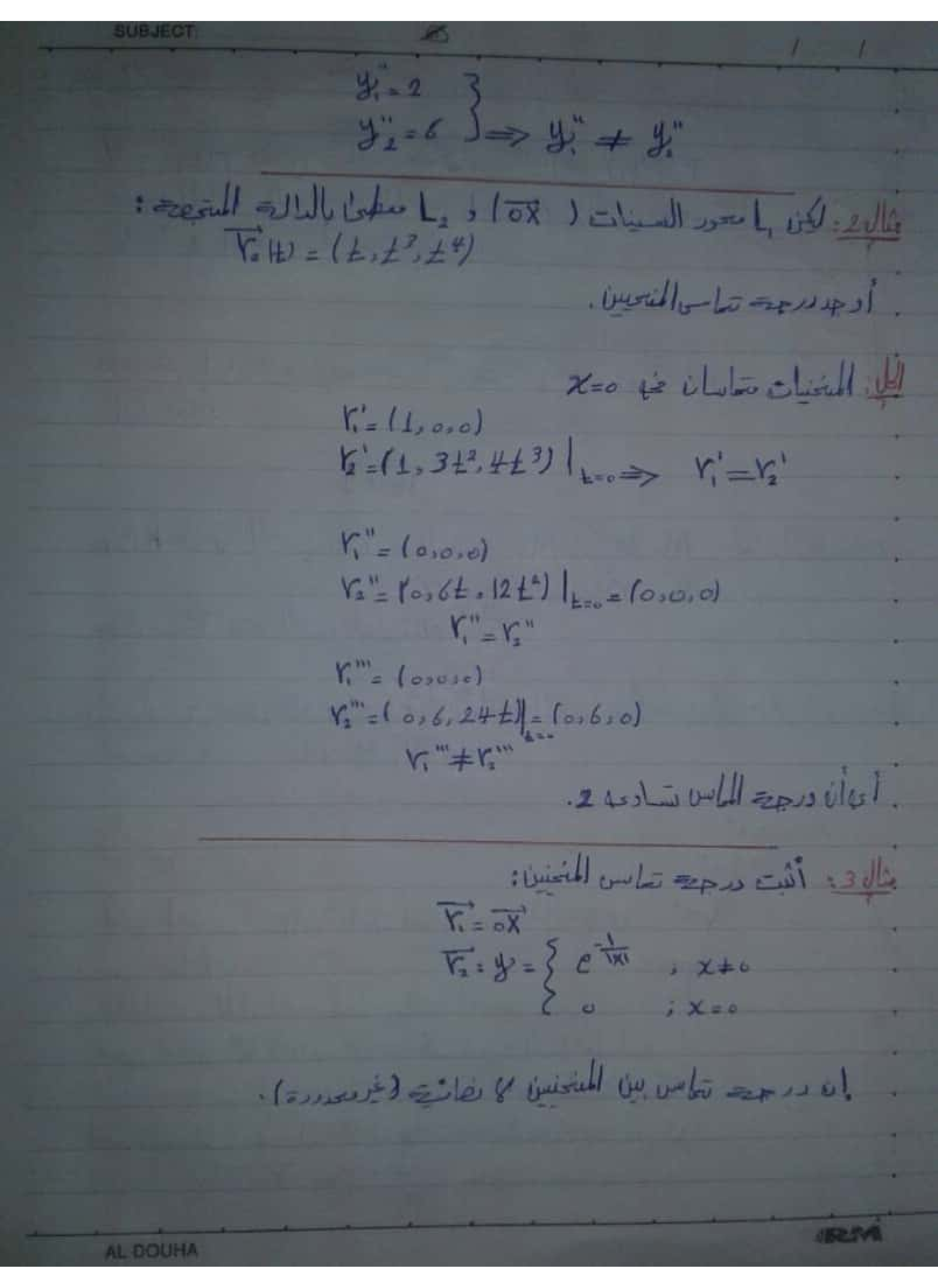
مثال: أوجد درجة تماس المنحنيين $y_1 = x^2, y_2 = 3x^2$ نلاحظ أن المنحنيين متماسان في النقطة $(0,0)$.

$t_0 = 0$ فإن:

$y_1' = 2x|_{x=0} = 0$

$y_2' = 6x|_{x=0} = 0$

أن درجة التماس تساوي الواحد



SUBJECT

$$\left.\begin{array}{l} y_1'' = 2 \\ y_2'' = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1'' \neq y_2''$$

مثال 2: لتكن L_1 محور السينات ($\overrightarrow{OX}$) و L_2 معطى بالدالة المتجهة:

$$\overrightarrow{r_2}(t) = (t, t^3, t^4)$$

أوجد درجة تماس المنحنيين.

الحل: المنحنيات متماسان عند $x=0$

$$r_1' = (1, 0, 0)$$

$$r_2' = (1, 3t^2, 4t^3)\Big|_{t=0} \Rightarrow r_1' = r_2'$$

$$r_1'' = (0, 0, 0)$$

$$r_2'' = (0, 6t, 12t^2)\Big|_{t=0} = (0, 0, 0)$$

$$r_1'' = r_2''$$

$$r_1''' = (0, 0, 0)$$

$$r_2''' = (0, 6, 24t)\Big|_{t=0} = (0, 6, 0)$$

$$r_1''' \neq r_2'''$$

أي أن درجة المماس تساوي 2.

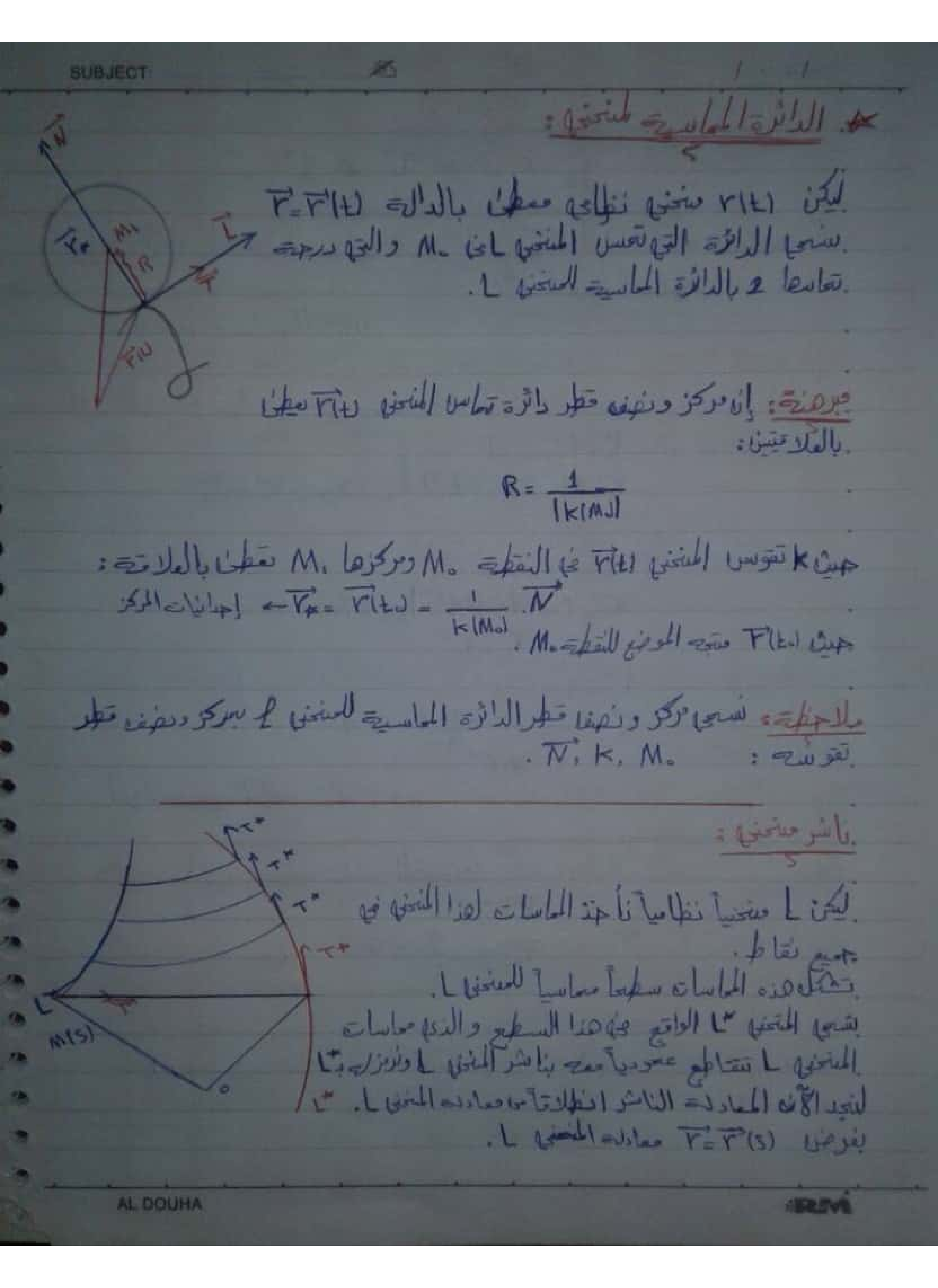
مثال 3: أثبت درجة تماس المنحنيين:

$$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{OX}$$

$$\overrightarrow{r_2} : y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

إن درجة تماس بين المنحنيين لا نهائية (غير محدودة).

AL DOUHA



★ الدائرة المماسية لمنحني :

ليكن $r(t)$ منحني نظامي معطى بالدالة $\vec{r} = \vec{r}(t)$.
نسمي الدائرة التي تمس المنحني L في M_0 والتي درجة تماسها 2 بالدائرة المماسية للمنحني L.

مبرهنة: إن مركز ونصف قطر دائرة تماس المنحني $\vec{r}(t)$ يعطى بالعلاقتين:

$$R = \frac{1}{|k(M_0)|}$$

حيث k تقوس المنحني $\vec{r}(t)$ في النقطة M_0 ومركزها M_1 تعطى بالعلاقة:

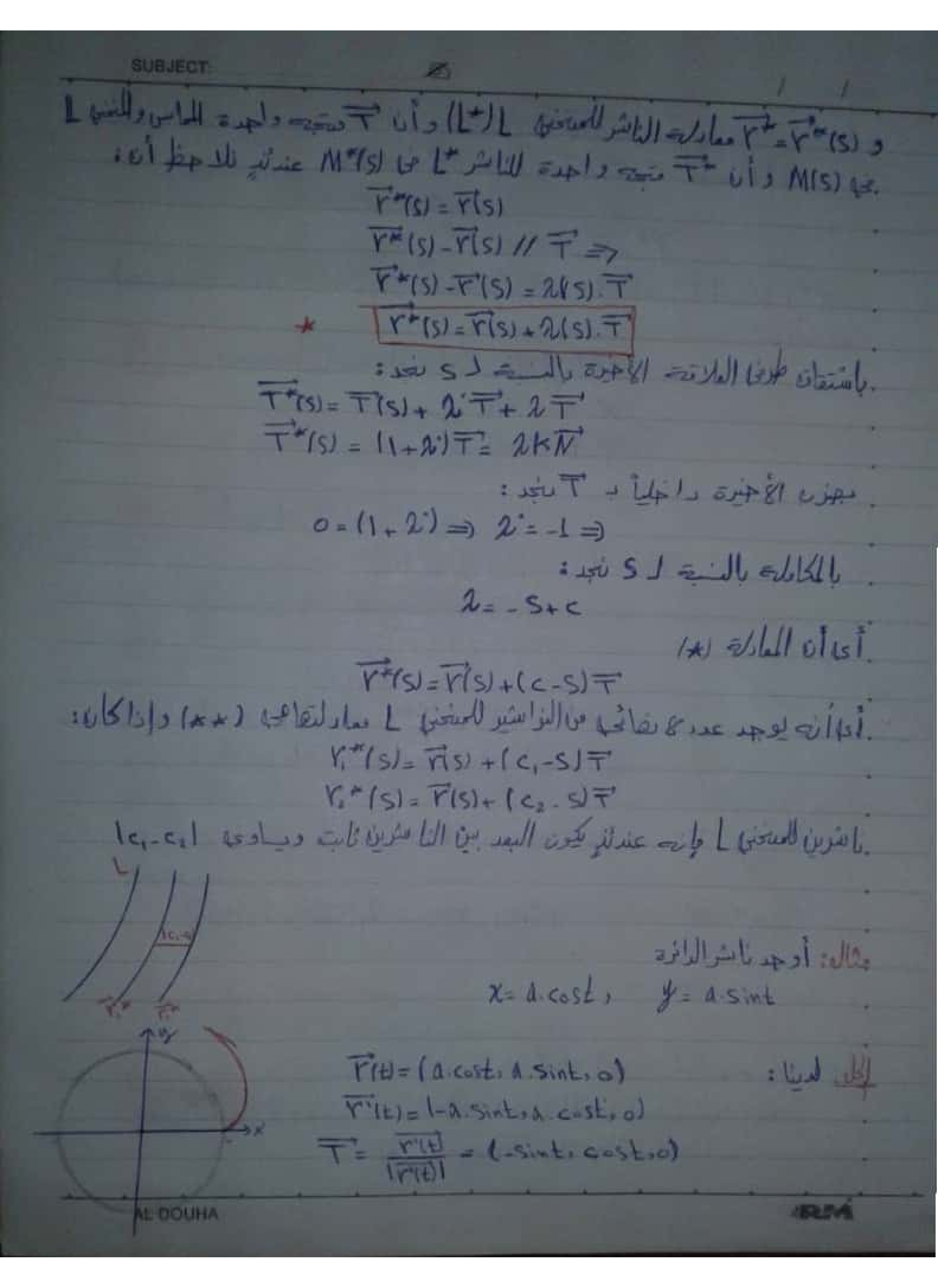
$$\vec{r}_* = \vec{r}(t_0) + \frac{1}{k(M_0)} \cdot \vec{N}$$ ← إحداثيات المركز

حيث $\vec{r}(t_0)$ متجه الموضع للنقطة M_0.

ملاحظة: نسمي مركز ونصف قطر الدائرة المماسية للمنحني L بمركز ونصف قطر تقوسه : $\vec{N}, k, M_0$.

ناشر منحني :

ليكن L منحنياً نظامياً نأخذ المماسات لهذا المنحني في جميع نقاطه.
تشكل هذه المماسات سطحاً مماسياً للمنحني L.
نسمي المنحني L^* الواقع في هذا السطح والذي مماسات المنحني L تتقاطع عمودياً معه بناشر المنحني L ونرمز له بـ L^*.
لنجد الآن المعادلة الناشر انطلاقاً من معادلة المنحني L.
بفرض $\vec{r} = \vec{r}(s)$ معادلة المنحني L.



SUBJECT:

و $\vec{r}^*(s)=\vec{r}^*$ معادلة الناشر للمنحني $L\,(L^*)$ وأن $\vec{T}$ متجه واحدة المماس والمنحني L في $M(s)$ وأن $\vec{T}^*$ متجه واحدة للناشر L^* في $M^*(s)$ عندئذٍ نلاحظ أن:

$$\vec{r}^*(s)=\vec{r}(s)$$

$$\vec{r}^*(s)-\vec{r}(s)\ //\ \vec{T}\Rightarrow$$

$$\vec{r}^*(s)-\vec{r}(s)=\lambda(s).\vec{T}$$

$$\star\qquad \boxed{\vec{r}^*(s)=\vec{r}(s)+\lambda(s).\vec{T}}$$

باشتقاق طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ s نجد:

$$\vec{T}^*(s)=\vec{T}(s)+\lambda'\vec{T}+\lambda\vec{T}'$$

$$\vec{T}^*(s)=(1+\lambda')\vec{T}=\lambda k\vec{N}$$

بضرب الأخيرة داخلياً بـ $\vec{T}$ نجد:

$$0=(1+\lambda')\Rightarrow\lambda'=-1\Rightarrow$$

بالمكاملة بالنسبة لـ s نجد:

$$\lambda=-s+c$$

أي أن المعادلة $(\star)$

$$\vec{r}^*(s)=\vec{r}(s)+(c-s)\vec{T}$$

أي أنه يوجد عدد لا نهائي من النواشر للمنحني L معادلتها $(\star\star)$ وإذا كان:

$$r_1^*(s)=\vec{r}(s)+(c_1-s)\vec{T}$$

$$r_2^*(s)=\vec{r}(s)+(c_2-s)\vec{T}$$

ناشرين للمنحني L فإنه عندئذٍ يكون البعد بين الناشرين ثابت ويساوي $|c_2-c_1|$

مثال: أوجد ناشر الدائرة

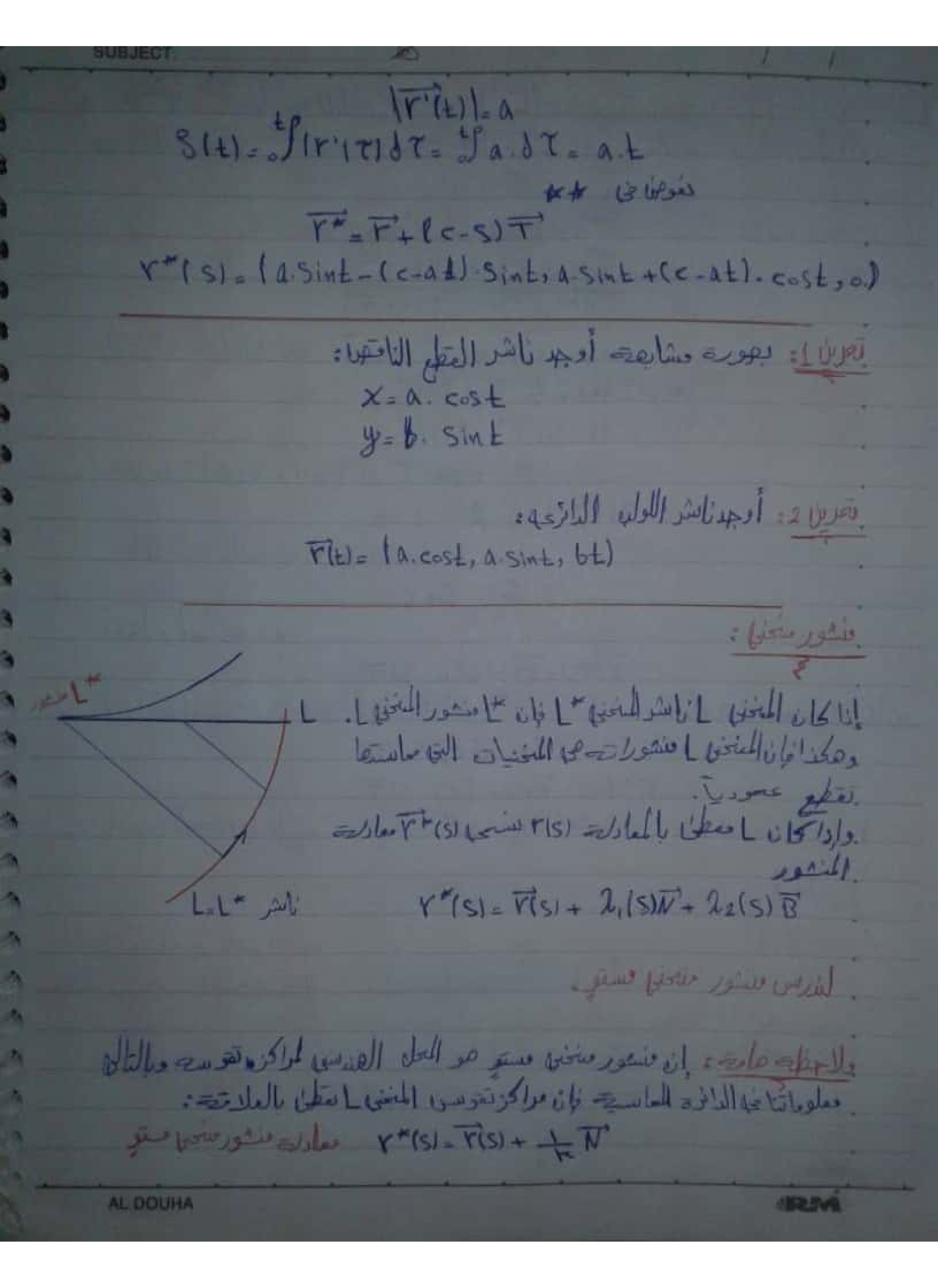
$$x=a.\cos t\ ,\qquad y=a.\sin t$$

الحل: لدينا:

$$\vec{r}(t)=(a.\cos t,\ a.\sin t,\ 0)$$

$$\vec{r}'(t)=(-a.\sin t,\ a.\cos t,\ 0)$$

$$\vec{T}=\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}=(-\sin t,\ \cos t,\ 0)$$



$$|\vec{r}'(t)| = a$$

$$s(t) = \int_0^t |r'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t a\, d\tau = a.t$$

نعوضها في **

$$\vec{r}^* = \vec{r} + (c-s)\vec{T}$$

$$r^*(s) = (a.\sin t - (c-at).\sin t,\ a.\sin t + (c-at).\cos t,\ 0)$$

تمرين 1: بصورة مشابهة أوجد ناشر القطع الناقص:

$$x = a.\cos t$$
$$y = b.\sin t$$

تمرين 2: أوجد ناشر اللولب الدائري:

$$\vec{r}(t) = (a.\cos t,\ a.\sin t,\ bt)$$

منشور منحني:

إذا كان المنحني L^* ناشر المنحني L فإن L^* منشور المنحني L.
وهكذا فإن المنحني L منشورات من المنحنيات التي مماساتها تقطع عمودياً.
وإذا كان L معطى بالمعادلة $r(s)$ نسمي $\vec{r}^*(s)$ معادلة المنشور

$$r^*(s) = \vec{r}(s) + \lambda_1(s)\vec{N} + \lambda_2(s)\vec{B}$$

لندرس منشور منحني مستوٍ

ملاحظة هامة: إن منشور منحني مستوٍ هو المحل الهندسي لمراكز تقوسه وبالتالي معلوماتنا في الدائرة المماسية فإن مراكز تقوس المنحني L تعطى بالعلاقة:

$$r^*(s) = \vec{r}(s) + \frac{1}{k}\vec{N}$$ معادلة منشور منحني مستوٍ

وباعتبار أن:

$$k = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}$$

$$\vec{N} = \frac{(\vec{r'} \times \vec{r''})}{|\vec{r'} \times \vec{r''}|} \times \frac{\vec{r'}}{|\vec{r'}|}$$

ومنه معادلة منشور المنحني L.

$$\vec{r^*}(t) = (x^*(t), \; y^*(t), 0)$$

$$= \vec{r}(t) + \left(\frac{|r'|}{|r' \times r''|}\right)^2 . (\vec{r'} \times \vec{r''}) \times \vec{r'}$$

معادلة منشور منحني مستوٍ

$$\begin{cases} x^*(t) = x - y' \dfrac{x'^2 + y'^2}{|x' y'' - y' x''|} \\ y^*(t) = y + x' \dfrac{x'^2 + y'^2}{|x' y'' - y' x''|} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \\ r' = \\ r'' = \end{matrix} \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix}$$

مثال 1: إن مركز تقوس الدائرة هو مركزها وبالتالي منشور الدائرة هو نقطة ويمثل مركزها، تأكد من ذلك.

مثال 2: أوجد منشور القطع الناقص:

$$x = a.\cos t, \quad y = b.\sin t$$

وأوجد نصف قطر تقوسه.

$$x' = -a.\sin t \Rightarrow x'' = -a\cos t$$

$$y' = b.\cos t \Rightarrow y'' = -b.\sin t$$

بالتعويض في معادلة المنشور:

$$x^* = a.\cos t - \frac{a^2.\sin^2 t + b^2.\cos^2 t}{a}.\cos t$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a}.\cos^3 t$$

$$y^* = b.\sin t - \frac{a^2.\sin^2 t + t^2 \cos^2 t}{b}.\sin t$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{b}.\sin^3 t$$

$$R = \frac{1}{k} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'.y'' - y'.x''|}$$

$$= \frac{(a^2.\sin^2 t + b^2.\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{a.b}$$